**Distributietheorie** **12-3-'02**

## Tentamenopgave[1]

### I

Beschouw de differentiaaloperator $D = (\frac{d}{dx})^2 + 2\frac{d}{dx} - 3$.

1. Bepaal de fundamentele oplossing van $D$ behorend tot $\mathcal{D}'_+$.

2. Bepaal de oplossing $T \in \mathcal{D}'_+$ van de vergelijking $DT = Y$ ($Y$ de Heaviside één-stap functie).

Aanwijzing: in plaats van een convolutieproduct te berekenen kan dit ook met de symboolrekening.

3. Bepaal, m.b.v. de symboolrekening, de oplossing $f$ van het volgende klassieke beginwaardeprobleem, waarbij $g$ een continue functie op $\mathbb{R}$ is:

$$Df = g, \quad f(0) = 0, f'(0) = 1$$

4. Wat is de oplossing wanneer $g = 1$ ?

### II

1. Laat $S$ en $T$ distributies op $\mathbb{R}^n$ zijn. Geef aan wanneer $S$ en $T$ aan de convolutievoorwaarde voldoen, en definieer in dat geval het convolutieproduct $S * T$.

2. Laat $S$ en $T$ distributies op $\mathbb{R}$ zijn die aan de convolutievoorwaarde voldoen. Toon aan dat de volgende 'productregel' geldig is:

(1) $$x(S * T) = (xS) * T + S * (xT)$$

Aanwijzing: bewijs o.m. het bestaan van de convolutieproducten in het rechter lid.

3. Kun je dit generaliseren tot het geval van distributies op $\mathbb{R}^m$ met $m > 1$ ?

### III

1. Geef de definitie van 'getemperde distributie', en van de Fouriergetransformeerde van een getemperde distributie.

2. Geef voor $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de Fouriergetransformeerden van $T'$ en van $2\pi i x T$.

3. Toon aan dat de Fouriergetransformeerde van een even (resp. oneven ) distributie even (resp. oneven) is.

4. Bepaal de Fouriergetransformeerde $T$ van de distributie $S$ = signum (functie gelijk aan 1 voor $x > 0$, gelijk aan $-1$ voor $x < 0$).

5. Geef de algemene inversieformule voor de Fouriertransformatie van getemperde distributies.

6. Bepaal de Fouriergetransformeerde van de distributie hw $\frac{1}{x}$.

---

[1]De onderdelen I, II en III zijn onafhankelijk